Zadania z matematyki Część II

Dr Tomasz Zgraja
Wydział Budowy Maszyn i Informatyki

Uniwersytet Bielsko-Bialski
EKSPRES MATURALNY UBB
ekspres.ubb.edu.pl

Spis treści

2. Procent

Zadanie 2.1. Pewną liczbę dodatnią zwiększono o 30%. Otrzymaną liczbę podzielono przez trzy uzyskując wynik 10,4. Jaka to liczba?

Zadanie 2.2. Suma 30% pierwszej liczby i 20% drugiej liczby wynosi 200, a różnica $\frac{1}{5}$ pierwszej liczby i 0,3 drugiej liczby wynosi 25. Znaleźć te liczby.

Zadanie 2.3. Pomidory o masie 64,2 kg znajdują się w trzech skrzynkach. W drugiej skrzynce znajduje się masa równa $\frac{4}{5}$ zawartości pierwszej skrzynki, a w trzeciej – masa równa $42\frac{1}{2}$% zawartości drugiej skrzynki. Jaki procent zawartości dwóch pierwszych skrzynek stanowi masa zawarta w skrzynce trzeciej?

Zadanie 2.4. Medyczna maseczka ochronna wielokrotnego użytku z wymiennymi filtrami wskutek podwyżki zdrożała o 40% i kosztuje obecnie 106,40 $\mathrm{zł}$. Obliczyć cenę maseczki przed podwyżką.

Zadanie 2.5. Cenę towaru zwiększono najpierw o 10%, a następnie obniżono o 10%. Ile procent ceny pierwotnej stanowi cena ostateczna?

Zadanie 2.6. Jeden bok prostokąta skrócono o 25%, a drugi wydłużono o 25%. Jak zmieni się pole prostokąta?

Spis treści

3. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa. Wielomiany

Zadanie 3.1. Funkcja liniowa $f(x) = (a-1)x + 3$ osiąga wartość najmniejszą równą 3. Wyznaczyć a.

Zadanie 3.2. Rozwiązać nierówność $\frac{12-5x}{2} < 3\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + 7x$.

Zadanie 3.3. Wyznaczyć a wiedząc, że para liczb $x = 1$, $y = -3$ spełnia układ równań
$$\begin{cases} x - y = a^2 \\ (1+a)x - 3y = -4a \end{cases}.$$

Zadanie 3.4. Uczeń, którego zapytano ile ma lat, odpowiedział: za 10 lat będę miał dwa razy tyle lat, ile miałem przed czterema laty. Ile uczeń ma lat?

Zadanie 3.5. Ile lat ma chłopak, który zapytany o wiek odpowiedział: «Gdybym miał o $\frac{1}{3}$ mniej lat, byłbym starszy o 3 lata od mego brata, który jest dwa razy młodszy ode mnie»?

Zadanie 3.6. Rozwiązać nierówność $3x(x+1) > x^2 + x + 24$.

Spis treści

3. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa. Wielomiany

Zadanie 3.7. Rozwiązać równanie $\frac{6x-1}{3x-2} = 3x + 2$.

Zadanie 3.8. Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych. Wykazać, że $1 + c > b$.

Zadanie 3.9. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $x^2 - 2ax + a^3 - 2a = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

Zadanie 3.10. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x większej od 2 i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$.

Zadanie 3.11. Obliczyć iloczyn wszystkich rozwiązań równania $2(x-4)(x^2-1) = 0$.

Zadanie 3.12. Reszty z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + bx^3 + cx^2$ przez dwumiany $(x-2)$ i $(x-3)$ są odpowiednio równe (-8) oraz (-18). Obliczyć resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x-4)$.

Spis treści

4. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Zadanie 4.1. Rozwiązać równanie $||x+1|+2|=2$.
Zadanie 4.2. Rozwiązać równanie $||3x-2|-1|=2$.
Zadanie 4.3. Rozwiązać nierówność $|x+1| \leqslant 2$.
Zadanie 4.4. Rozwiązać nierówność $|x-2|>1$.
Zadanie 4.5. Rozwiązać nierówność $|x+5|<|2x-1|$.
Zadanie 4.6. Rozwiązać równanie $\sqrt{x^2}+x=4$.
Zadanie 4.7. Rozwiązać równanie $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+2x+1}=6-x$.

Spis treści

5. Logarytm

Zadanie 5.1. Wykazać że $2\log_5 4 - 3\log_5 \frac{1}{2} = 7\log_5 2$.

Zadanie 5.2. Wykazać, że $\log_2 9 = \frac{1}{\log_3 \sqrt{2}}$.

Zadanie 5.3. Wykazać że $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_5 3} > 2$.

Zadanie 5.4. Wykazać że $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$.

Zadanie 5.5. Obliczyć $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$.

Zadanie 5.6. Obliczyć $\log_{\sqrt{7}} 3 \cdot \log_3 49$.

Spis treści

Zadanie 6.1. Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Obliczyć $\cos\alpha$.

Zadanie 6.2. Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Obliczyć $\operatorname{tg}\alpha$.

Zadanie 6.3. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$. Obliczyć wartość wyrażenia $2\sin\alpha\cos\alpha$.

Zadanie 6.4. Rozwiązać równanie $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1$.

Zadanie 6.5. Rozwiązać równanie $\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Spis treści

7. Ciągi liczbowe

Zadanie 7.1. Obliczyć trzeci wyraz ciągu (a_n) jeśli, $a_n = (-2)^n \cdot n + 1$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 7.2. Sprawdzić, czy ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) są arytmetyczne, jeśli:

(i) $a_n = 6n^2 - n^3$, $n \geqslant 1$;
(ii) $b_n = 2n + 13$, $n \geqslant 1$;
(iii) $c_n = 2^n$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 7.3. Ciąg (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, jest arytmetyczny. Różnica tego ciągu jest równa 5, a pierwszy wyraz tego ciągu jest równy (-3). Obliczyć $\frac{a_4}{a_2}$.

Zadanie 7.4. Ciąg (x, y, z) jest geometryczny. Iloczyn wszystkich wyrazów tego ciągu jest równy 64. Obliczyć y.

7. Ciągi liczbowe

Zadanie 7.5. Rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa 10. Wyrazy a_3, a_5, a_{13} tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznaczyć wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n).

Zadanie 7.6. Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jes równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Ponadto ciąg $(a + 100, b, c)$ jest geometryczny. Obliczyć wyrazy ciągu (a, b, c, d).

Zadanie 7.7. Liczba x jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 1 i ilorazie $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Liczba y jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 1 i ilorazie $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Obliczyć $x - y$.

2. Procent

Zadanie 2.1.

Pewną liczbę dodatnią zwiększono o 30%. Otrzymaną liczbę podzielono przez trzy uzyskując wynik 10,4. Jaka to liczba?

x – szukana liczba dodatnia

$$\frac{1}{3}(x + 30\%x) = 10{,}4$$
$$x + 30\%x = 31{,}2$$
$$x + 0{,}3x = 31{,}2$$
$$1{,}3x = 31{,}2$$
$$x = \frac{31{,}2}{1{,}3}$$
$$x = \frac{312}{13}$$
$$x = 24$$
$$(x = 24 > 0, \text{ czyli spełnia warunki zadania})$$

Poszukiwaną liczbą dodatnią jest 24.

2. Procent

Zadanie 2.2.

Suma 30% pierwszej liczby i 20% drugiej liczby wynosi 200, a różnica $\frac{1}{5}$ pierwszej liczby i 0,3 drugiej liczby wynosi 25. Znaleźć te liczby.

x – pierwsza liczba, y – druga liczba

$$\begin{cases} 30\%x + 20\%y = 200 \\ \frac{1}{5}x - 0{,}3y = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}3x + 0{,}2y = 200 \\ 0{,}2x - 0{,}3y = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 2000 \\ 2x - 3y = 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2000 \quad / \quad \cdot 3 \\ 2x - 3y = 250 \quad / \quad \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x + 6y = 6000 \\ 4x - 6y = 500 \end{cases}$$

$$13x = 6500$$

$$x = 500$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2000 \quad / \quad \cdot 2 \\ 2x - 3y = 250 \quad / \quad \cdot (-3) \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 4y = 4000 \\ -6x + 9y = -750 \end{cases}$$

$$13y = 3250$$

$$y = 250$$

$$\begin{cases} x = 500 \\ y = 250 \end{cases}$$

Pierwsza liczba jest równa 500, a druga liczba jest równa 250.

2. Procent

Zadanie 2.3.

Pomidory o masie 64,2 kg znajdują się w trzech skrzynkach. W drugiej skrzynce znajduje się masa równa $\frac{4}{5}$ zawartości pierwszej skrzynki, a w trzeciej – masa równa $42\frac{1}{2}\%$ zawartości drugiej skrzynki. Jaki procent zawartości dwóch pierwszych skrzynek stanowi masa zawarta w skrzynce trzeciej?

x, $\frac{4}{5}x$, $42\frac{1}{2}\% \cdot \frac{4}{5}x$ – masy pomidorów zawarte odpowiednio w pierwszej, drugiej i trzeciej skrzynce

$$x + \frac{4}{5}x + 42\frac{1}{2}\% \cdot \frac{4}{5}x = 64{,}2$$

$$x + 0{,}8x + 42{,}5\% \cdot 0{,}8x = 64{,}2$$

$$1{,}8x + 0{,}425 \cdot 0{,}8x = 64{,}2$$

$$1{,}8x + 0{,}34x = 64{,}2$$

$$2{,}14x = 64{,}2$$

$$x = \frac{64{,}2}{2{,}14}$$

$$x = \frac{6420}{214}$$

$$x = 30$$

Zadanie 2.3.

$$
\begin{aligned}
\frac{64{,}2-\left(x+\frac{4}{5}x\right)}{x+\frac{4}{5}x} &= \frac{64-\left(30+\frac{4}{5}\cdot 30\right)}{30+\frac{4}{5}\cdot 30} = \frac{64{,}2-(30+24)}{30+24} \\
&= \frac{64{,}2-54}{54} = \frac{10{,}2}{54} = \frac{102}{540} = \frac{17}{90} \\
&= \frac{17}{90}\cdot 1 = \frac{17}{90}\cdot 100\cdot\frac{1}{100} = \frac{170}{9}\% = 18\frac{8}{9}\%
\end{aligned}
$$

Masa pomidorów zawarta w skrzynce trzeciej stanowi $18\frac{8}{9}\%$ masy pomidorów zawartej w skrzynkach pierwszej i drugiej.

Zadanie 2.4.

Medyczna maseczka ochronna wielokrotnego użytku z wymiennymi filtrami wskutek podwyżki zdrożała o 40% i kosztuje obecnie 106,40 zł. Obliczyć cenę maseczki przed podwyżką.

x – cena maseczki przed podwyżką

$$x + 40\%x = 106{,}40$$

$$x + 0,40x = 106{,}40$$

$$1{,}40x = 106,40$$

$$x = \frac{106,40}{1,40}$$

$$x = \frac{1064}{14}$$

$$x = 76$$

Cena maseczki przed podwyżką była równa 76 zł.

2. Procent

Zadanie 2.5.

Cenę towaru zwiększono najpierw o 10%, a następnie obniżono o 10%. Ile procent ceny pierwotnej stanowi cena ostateczna?

x – cena pierwotna towaru, y – cena ostateczna towaru

$$\begin{aligned} y &= (x + 10\%x) - 10\%(x + 10\%x) = (x + 0{,}1x) - 0{,}1 \cdot (x + 0{,}1x) = (x + 0{,}1x)(1 - 0{,}1) \\ &= x(1 + 0{,}1)(1 - 0{,}1) = x(1 - 0{,}01) = 0{,}99x = 99\%x \end{aligned}$$

Ostateczna cena towaru stanowi 99% ceny pierwotnej.

Zadanie 2.6.

Jeden bok prostokąta skrócono o 25%, a drugi wydłużono o 25%. Jak zmieni się pole prostokąta?
S – pole wyjściowego prostokąta, S_1 – pole prostokąta po dokonanych zmianach

$$S = ab$$

$$\begin{aligned} S_1 &= (a + 25\%a)(b - 25\%b) = (a + 0{,}25a)(b - 0{,}25b) = a(1 + 0{,}25)b(1 - 0{,}25) \\ &= ab(1 + 0{,}25)(1 - 0{,}25) = S \cdot (1 - 0{,}0625) = 0{,}9375S = 93{,}75\%S \end{aligned}$$

Pole prostokąta zmniejszyło się o 6,25% (pole pole prostokąta po dokonanych zmianach stanowi 93,75% pola wyjściowego prostokąta).

3. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa. Wielomiany

Zadanie 3.1.

Funkcja liniowa $f(x) = (a-1)x + 3$ osiąga wartość najmniejszą równą 3. Wyznaczyć a.
Z treści zadania wynika, że funkcja f jest stała i przyjmuje wartość równą 3 dla każdej liczby rzeczywistej x.
Wobec tego

$$a - 1 = 0,$$

a zatem

$$a = 1.$$

Zadanie 3.2.

Rozwiązać nierówność $\frac{12-5x}{2} < 3\left(1-\frac{1}{2}x\right)+7x$.

$$\frac{12-5x}{2} < 3\left(1-\frac{1}{2}x\right)+7x$$

$$\frac{12-5x}{2} < 3-\frac{3}{2}x+7x$$

$$12-5x < 6-3x+14x$$

$$12-5x < 6+11x$$

$$-16x < -6$$

$$x > \frac{-6}{-16}$$

$$x > \frac{3}{8}$$

$$x \in \left(\frac{3}{8}, +\infty\right)$$

Zadanie 3.3.

Wyznaczyć a wiedząc, że para liczb $x = 1$, $y = -3$ spełnia układ równań $\begin{cases} x - y = a^2 \\ (1+a)x - 3y = -4a \end{cases}$.

$$\begin{cases} 1 - (-3) = a^2 \\ (1+a) \cdot 1 - 3 \cdot (-3) = -4a \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = a^2 \\ 1 + a + 9 = -4a \end{cases} \quad \begin{cases} 4 - a^2 = 0 \\ 5a = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2+a)(2-a) = 0 \\ a = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \vee a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \quad \{\ a = -2$$

Zadanie 3.4.

Uczeń, którego zapytano ile ma lat, odpowiedział: za 10 lat będę miał dwa razy tyle lat, ile miałem przed czterema laty. Ile uczeń ma lat?

x – wiek ucznia

$$x + 10 = 2(x - 4)$$

$$x + 10 = 2x - 8$$

$$-x = -18$$

$$x = 18$$

Uczeń ma 18 lat.

Zadanie 3.5.

Ile lat ma chłopak, który zapytany o wiek odpowiedział: «Gdybym miał o $\frac{1}{3}$ mniej lat, byłbym starszy o 3 lata od mego brata, który jest dwa razy młodszy ode mnie»?

x – wiek chłopaka

$$x - \frac{1}{3}x = \frac{x}{2} + 3$$
$$6x - 2x = 3x + 18$$
$$x = 18$$

Chłopak ma 18 lat.

Zadanie 3.6.

Rozwiązać nierówność $3x(x+1) > x^2 + x + 24$.

$$3x(x+1) > x^2 + x + 24$$

$$3x^2 + 3x > x^2 + x + 24$$
$$3x^2 + 3x - x^2 - x - 24 > 0$$
$$2x^2 + 2x - 24 > 0$$
$$x^2 + x - 12 > 0$$

$$\left[\begin{array}{c} \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 \\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7 \\ x = \frac{-1-7}{2} \vee x = \frac{-1+7}{2} \\ x = \frac{-8}{2} \vee x = \frac{6}{2} \\ x = -4 \vee x = 3 \end{array}\right]$$

$$x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$$

Zadanie 3.7.

Rozwiązać równanie $\frac{6x-1}{3x-2} = 3x + 2$.

$$\frac{6x-1}{3x-2} = 3x + 2$$

$$\text{dziedzina równania: } \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{2}{3}\right\}$$

$$6x - 1 = (3x + 2)(3x - 2)$$

$$6x - 1 = 9x^2 - 4$$

$$-9x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x = \frac{2-4}{6} \vee x = \frac{2+4}{6}$$

$$x = \frac{-2}{6} \vee x = \frac{6}{6}$$

$$x = -\frac{1}{3} \vee x = 1$$

obydwa pierwiastki należą do dziedziny równania

Zadanie 3.8.

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych. Wykazać, że $1 + c > b$.
Z treści zadania wynika, że wyróżnik funkcji kwadratowej jest ujemny. Stąd otrzymujemy

$$b^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4c < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4c.$$

Zauważmy, że

$$1 + c > b \Leftrightarrow 4 + 4c > 4b \Leftrightarrow 4c > 4b - 4 \Leftrightarrow 4b - 4 < 4c.$$

Wobec tego wystarczy wykazać, że

$$4b - 4 \leqslant b^2$$

$$\left(\text{jeśli } 4b - 4 \leqslant b^2 \text{ i } b^2 < 4c, \text{ to } 4b - 4 < 4c\right).$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa, bo

$$4b - 4 \leqslant b^2 \Leftrightarrow 4b - 4 - b^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -b^2 + 4b - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (b-2)^2 \geqslant 0.$$

Zadanie 3.9.

Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $x^2 - 2ax + a^3 - 2a = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.
Równanie kwadratowe

$$x^2 - 2ax + a^3 - 2a = 0$$

ma dwa różne rozwiązania dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta > 0 \wedge x_1 + x_2 > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 > 0.$$

(i) $\Delta > 0$

$$(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^3 - 2a) > 0$$
$$4a^2 - 4a^3 + 8a > 0$$
$$-4a^3 + 4a^2 + 8a > 0$$
$$a^3 - a^2 - 2a < 0$$

3. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa. Wielomiany

Zadanie 3.9.

$$a(a^2 - a - 2) < 0$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{rozkładamy trójmian kwadratowy na czynniki} \\ \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3 \\ a = \frac{1-3}{2} \vee a = \frac{1+3}{2} \\ a = \frac{-2}{2} \vee a = \frac{4}{2} \\ a = -1 \vee a = 2 \end{array}\right]$$

$$a(a+1)(a-2) < 0$$

$$(a+1)a(a-2) < 0$$

$$\left[\begin{array}{c} W(a) = (a+1)a(a-2) \\ \text{miejsca zerowe wielomianu } W\text{: } a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 2 \\ \text{zmiana znaku wielomianu } W \text{ we wszystkich miejscach zerowych} \\ W(3) = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 > 0 \end{array}\right]$$

$$a \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$$

3. Funkcja liniowa. Funkcja kwadratowa. Wielomiany

Zadanie 3.9.

(ii) $x_1 + x_2 > 0$

$$-\frac{-2a}{1} > 0$$
$$2a > 0$$
$$a > 0$$
$$a \in (0, +\infty)$$

(iii) $x_1 \cdot x_2 > 0$

$$\frac{a^3 - 2a}{1} > 0$$
$$a^3 - 2a > 0$$
$$a(a^2 - 2) > 0$$
$$a(a^2 - (\sqrt{2})^2) > 0$$
$$a(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2}) > 0$$

Zadanie 3.9.

$$(a+\sqrt{2})a(a-\sqrt{2})>0$$

$$\left[\begin{array}{c} W(a)=(a+\sqrt{2})a(a-\sqrt{2}) \\ \text{miejsca zerowe wielomianu } W\text{: } a_1=-\sqrt{2},\ a_2=0,\ a_3=\sqrt{2} \\ \text{zmiana znaku wielomianu } W \text{ we wszystkich miejscach zerowych} \\ W(2)=(2+\sqrt{2})\cdot 2\cdot(2-\sqrt{2})>0 \end{array}\right]$$

$$a\in(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$$

Biorąc pod uwagę (i) $\wedge$ (ii) $\wedge$ (iii) otrzymujemy

$$a\in(-\infty,-1)\cup(0,2)\wedge a\in(0,+\infty)\wedge a\in(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty),$$

czyli

$$a\in(\sqrt{2},2).$$

Zadanie 3.10.

Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x większej od 2 i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$.
Nierówność

$$5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$$

jest równoważna nierówności

$$3y^2 - 6xy + 5x^2 - 2x - 4 > 0.$$

Traktując lewą stronę powyższej nierówności jako trójmian kwadratowy zmiennej y zauważamy, że będzie ona prawdziwa dla każdego y wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_y < 0.$$

Zadanie 3.10.

Wobec tego

$$(-6x)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (5x^2 - 2x - 4) < 0 \Leftrightarrow 36x^2 - 60x^2 + 24x + 48 < 0 \Leftrightarrow -24x^2 + 24x + 48 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{c} \Delta_x = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \\ \sqrt{\Delta_x} = \sqrt{9} = 3 \\ x = \frac{1-3}{2} \vee x = \frac{1+3}{2} \\ x = \frac{-2}{2} \vee x = \frac{4}{2} \\ x = -1 \vee x = 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

Z treści zadania wynika, że $x > 2$, a zatem $\Delta_y < 0$, czyli dowodzona nierówność jest prawdziwa dla $x > 2$ i $y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3.11.

Obliczyć iloczyn wszystkich rozwiązań równania $2(x-4)(x^2-1)=0$.
Zauważmy, że

$$2(x-4)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 2(x-4)(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=4 \vee x=-1 \vee x=1$$

a zatem iloczyn wszystkich rozwiązań równania jest równy

$$4\cdot(-1)\cdot 1=-4.$$

Zadanie 3.12.

Reszty z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + bx^3 + cx^2$ przez dwumiany $(x-2)$ i $(x-3)$ są odpowiednio równe (-8) oraz (-18). Obliczyć resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x-4)$.

$$\begin{cases} W(2) = -8 \\ W(3) = -18 \end{cases} \begin{cases} 16 + 8b + 4c = -8 \\ 81 + 27b + 9c = -18 \end{cases} \begin{cases} 8b + 4c = -24 \\ 27b + 9c = -99 \end{cases} \begin{cases} 2b + c = -6 \\ 3b + c = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -6 - 2b \\ 3b + c = -11 \end{cases} \begin{cases} 3b - 6 - 2b = -11 \\ c = -6 - 2b \end{cases} \begin{cases} b = -5 \\ c = -6 - 2b \end{cases} \begin{cases} b = -5 \\ c = -6 - 2 \cdot (-5) \end{cases} \begin{cases} b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$W(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2$$

$$W(4) = 4^4 - 5 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 = 4^2 \cdot (4^2 - 5 \cdot 4 + 4) = 16 \cdot (16 - 20 + 4) = 16 \cdot 0 = 0$$

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-4)$ jest równa zeru.

4. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Zadanie 4.1.

Rozwiązać równanie $||x+1|+2| = 2$.

$$||x+1|+2| = 2$$

$$|x+1|+2 = -2 \vee |x+1|+2 = 2$$

$$|x+1| = -4 \vee |x+1| = 0$$

(równanie po lewej stronie jest sprzeczne, bo wartość bezwzględna przyjmuje tylko wartości nieujemne)

$$|x+1| = 0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

4. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Zadanie 4.2.

Rozwiązać równanie $||3x-2|-1|=2$.

$$||3x-2|-1|=2$$

$$|3x-2|-1=-2 \vee |3x-2|-1=2$$

$$|3x-2|=-1 \vee |3x-2|=3$$

(równanie po lewej stronie jest sprzeczne, bo wartość bezwzględna przyjmuje tylko wartości nieujemne)

$$|3x-2|=3$$

$$3x-2=-3 \vee 3x-2=3$$

$$3x=-1 \vee 3x=5$$

$$x=-\frac{1}{3} \vee x=\frac{5}{3}$$

4. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Zadanie 4.3.

Rozwiązać nierówność $|x+1| \leqslant 2$.

$$|x+1| \leqslant 2$$

$$-2 \leqslant x+1 \leqslant 2$$

$$-2 \leqslant x+1 \wedge x+1 \leqslant 2$$

$$-3 \leqslant x \wedge x \leqslant 1$$

$$x \geqslant -3 \wedge x \leqslant 1$$

$$x \in [-3, 1]$$

Zadanie 4.4.

Rozwiązać nierówność $|x-2|>1$.

$$|x-2|>1$$
$$x-2<-1 \vee x-2>1$$
$$x<1 \vee x>3$$
$$x \in (-\infty, 1) \vee x \in (3, +\infty)$$
$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

Zadanie 4.5.

Rozwiązać nierówność $|x+5| < |2x-1|$.

$$|x+5| < |2x-1|$$

$$|x+5| = \begin{cases} x+5, & x+5 \geqslant 0 \\ -(x+5), & x+5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+5, & x \geqslant -5 \\ -x-5, & x < -5 \end{cases},$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & 2x-1 \geqslant 0 \\ -(2x-1), & 2x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1, & x \geqslant \frac{1}{2} \\ 1-2x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(i) $x \in (-\infty, -5)$

$$-x-5 < 1-2x$$
$$x < 6$$
$$x \in (-\infty, -5)$$

(ii) $x \in \left[-5, \frac{1}{2}\right)$

$$x+5 < 1-2x$$
$$3x < -4$$
$$x < -\frac{4}{3}$$
$$x \in \left[-5, -\frac{4}{3}\right)$$

Zadanie 4.5.

(iii) $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$$x + 5 < 2x - 1$$
$$-x < -6$$
$$x > 6$$
$$x \in (6, +\infty)$$

Biorąc pod uwagę (i) $\vee$ (ii) $\vee$ (iii) otrzymujemy rozwiązanie równania, a mianowicie

$$x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (6, +\infty).$$

Zadanie 4.6.

Rozwiązać równanie $\sqrt{x^2} + x = 4$.

$$\sqrt{x^2} + x = 4$$

Dziedziną równania jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, bo $x^2 \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

$$|x| + x = 4$$

$$|x| = \begin{matrix} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{matrix}$$

(i) $x \in (-\infty, 0)$

$$-x + x = 4$$
$$0 = 4$$
$$\text{sprzeczność}$$

(ii) $x \in [0, +\infty)$

$$x + x = 4$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

Biorąc pod uwagę (i) $\vee$ (ii) otrzymujemy rozwiązanie równania, a mianowicie $x = 2$.

Zadanie 4.7.

Rozwiązać równanie $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+2x+1}=6-x$.

$$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+2x+1}=6-x$$

Dziedziną równania jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, bo zarówno $x^2-6x+9\geqslant 0$, jak i $x^2+2x+1\geqslant 0$ dla $x\in\mathbb{R}$.

$$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=6-x$$

$$|x-3|+|x+1|=6-x$$

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & x-3\geqslant 0 \\ -(x-3), & x-3<0 \end{cases}=\begin{cases} x-3, & x\geqslant 3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases}$$

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & x+1\geqslant -1 \\ -(x+1), & x+1<0 \end{cases}=\begin{cases} x+1, & x\geqslant -1 \\ -x-1, & x<-1 \end{cases}$$

(i) $x\in(-\infty,-1)$

$$3-x+(-x-1)=6-x$$

$$3-x-x-1=6-x$$

$$-x=4$$

$$x=-4$$

Zadanie 4.7.

(ii) $x \in [-1, 3)$

$$3 - x + x + 1 = 6 - x$$
$$x = 2$$

(iii) $x \in [3, +\infty)$

$$x - 3 + x + 1 = 6 - x$$
$$3x = 8$$
$$x = \frac{8}{3}$$
$$\text{sprzeczność}$$

Biorąc pod uwagę (i) $\vee$ (ii) $\vee$ (iii) otrzymujemy rozwiązanie równania, a mianowicie $x = -4 \vee x = 2$.

5. Logarytm

Zadanie 5.1.

Wykazać że $2\log_5 4 - 3\log_5 \frac{1}{2} = 7\log_5 2$.

$$2\log_5 4 - 3\log_5 \frac{1}{2} = \log_5 4^2 - \log_5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \log_5 \frac{4^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \log_5 \frac{(2^2)^2}{(2^{-1})^3} = \log_5 \frac{2^4}{2^{-3}} = \log_5 2^7 = 7\log_5 2$$

5. Logarytm

Zadanie 5.2.

Wykazać, że $\log_2 9 = \frac{1}{\log_3 \sqrt{2}}$.

$$\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2\log_2 3 = 2 \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 2} = 2 \cdot \frac{1}{\log_3 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\log_3 \sqrt{2}}$$

Zadanie 5.3.

Wykazać że $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_5 3} > 2$.

$$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_5 3} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\log_3 3}{\log_3 2}} + \frac{1}{\frac{\log_3 3}{\log_3 5}} > 2 \Leftrightarrow \frac{\log_3 2}{\log_3 3} + \frac{\log_3 5}{\log_3 3} > 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 2 + \log_3 5 > 2\log_3 3 \Leftrightarrow \log_3(2 \cdot 5) > \log_3 3^2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 10 > \log_3 9 \Leftrightarrow \log_3 10 - \log_3 9 > 0 \Leftrightarrow \log_3 \frac{10}{9} > 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo zarówno podstawa logarytmu, jak i liczba logarytmowana są większe od jedności.

5. Logarytm

Zadanie 5.4.

Wykazać że $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$.

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2 \Leftrightarrow \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = 2 \Leftrightarrow \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow \log_2 2^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \log_2 2 = 2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

Zadanie 5.5.

Obliczyć $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$.

$$\log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \log_3 5 \cdot \log_{25} 3^3 = \log_3 5 \cdot 3\log_{25} 3 = 3\log_3 5 \cdot \frac{\log_5 3}{\log_5 25}$$
$$= 3 \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 3} \cdot \frac{\log_5 3}{\log_5 5^2} = 3 \cdot \frac{1}{2\log_5 5} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Zadanie 5.6.

Obliczyć $\log_{\sqrt{7}} 3 \cdot \log_3 49$.

$$\log_{\sqrt{7}} 3 \cdot \log_3 49 = \frac{\log_7 3}{\log_7 \sqrt{7}} \cdot \log_3 7^2 = \frac{\log_7 3}{\log_7 7^{\frac{1}{2}}} \cdot 2 \log_3 7 = 2 \cdot \frac{\log_7 3}{\frac{1}{2} \log_7 7} \cdot \frac{\log_7 7}{\log_7 3} = 2 \cdot 2 = 4$$

6. Funkcje trygonometryczne

Zadanie 6.1.

Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Obliczyć $\cos\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \vee \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha > 0, \quad \text{bo kąt } \alpha \text{ jest ostry}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

6. Funkcje trygonometryczne

Zadanie 6.2.

Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Obliczyć $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \vee \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha > 0, \quad \text{bo kąt } \alpha \text{ jest ostry}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{\frac{25-9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{\frac{16}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

6. Funkcje trygonometryczne

Zadanie 6.3.

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$. Obliczyć wartość wyrażenia $2\sin\alpha\cos\alpha$.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{25}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{25}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = \frac{49}{25}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49}{25} - 1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49-25}{25}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$$

6. Funkcje trygonometryczne

Zadanie 6.4.

Rozwiązać równanie $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1$.

$$\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{1}{3}\pi \cdot \cos 2x + \cos\frac{1}{3}\pi \cdot \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi + 2x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\pi + 2x = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee \frac{1}{3}\pi + 2x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

($\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych)

$$2x = -\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \vee 2x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{1}{12}\pi + k\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

6. Funkcje trygonometryczne

Zadanie 6.5.

Rozwiązać równanie $\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)\cdot\cos\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)\cdot\cos\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\left(\sin x\cdot\cos\frac{1}{4}\pi+\cos x\cdot\sin\frac{1}{4}\pi\right)\cdot\left(\cos x\cdot\cos\frac{1}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x+\cos x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos x-\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

6. Funkcje trygonometryczne

Zadanie 6.5.

$$\frac{2}{4} \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$2 \cdot \cos(2x) = \sqrt{2}$$

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 2\pi - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

($\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych)

$$x = \frac{1}{8}\pi + k\pi \vee x = \frac{7}{8}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

7. Ciągi liczbowe

Zadanie 7.1.

Obliczyć trzeci wyraz ciągu (a_n) jeśli, $a_n = (-2)^n \cdot n + 1$, $n \geqslant 1$.

$$a_3 = (-2)^3 \cdot 3 + 1 = (-8) \cdot 3 + 1 = -24 + 1 = -23$$

Zadanie 7.2.

Sprawdzić, czy ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) są arytmetyczne, jeśli:

(i) $a_n = 6n^2 - n^3,\ n \geqslant 1;$

(ii) $b_n = 2n + 13,\ n \geqslant 1;$

(iii) $c_n = 2^n,\ n \geqslant 1.$

(i) $a_n = 6n^2 - n^3,\ n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} r_a = a_{n+1} - a_n &= 6(n+1)^2 - (n+1)^3 - (6n^2 - n^3) \\ &= 6(n^2 + 2n + 1) - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 6n^2 + n^3 \\ &= 6n^2 + 12n + 6 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1 - 6n^2 + n^3 = -3n^2 + 9n + 5 \end{aligned}$$

Różnica r_a nie jest stała, a zatem ciąg a_n nie jest arytmetyczny.

(ii) $b_n = 2n + 13,\ n \geqslant 1$

$$r_b = b_{n+1} - b_n = 2(n+1) + 13 - (2n+13) = 2n + 2 + 13 - 2n - 13 = 2$$

Różnica r_b jest stała, a zatem ciąg b_n jest arytmetyczny.

7. Ciągi liczbowe

Zadanie 7.2.

(iii) $c_n = 2^n,\ n \geqslant 1$

$$r_c = c_{n+1} - c_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n \cdot 2 - 2^n = 2^n \cdot (2-1) = 2^n \cdot 1 = 2^n$$

Różnica r_c nie jest stała, a zatem ciąg c_n nie jest arytmetyczny.

Zadanie 7.3.

Ciąg (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, jest arytmetyczny. Różnica tego ciągu jest równa 5, a pierwszy wyraz tego ciągu jest równy (-3). Obliczyć $\frac{a_4}{a_2}$.

$$a_1 = -3, \quad r = 5$$

$$a_2 = -3 + (2-1) \cdot 5 = -3 + 5 = 2$$
$$a_4 = -3 + (4-1) \cdot 5 = -3 + 15 = 12$$
$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{12}{2} = 6$$

Zadanie 7.4.

Ciąg (x, y, z) jest geometryczny. Iloczyn wszystkich wyrazów tego ciągu jest równy 64. Obliczyć y.

$$xyz = 64$$

$$xz = y^2$$

$$(xz)y = 64$$

$$y^2 \cdot y = 64$$

$$y^3 = 64$$

$$\left[\begin{array}{c} y^3 - 64 = 0 \\ y^3 - 4^3 = 0 \\ (y-4)(y^2+4y+16) = 0 \\ \left[y^2 + 4y + 16 > 0, \ \text{ bo } \ \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = -48 < 0\right] \\ x - 4 = 0 \end{array}\right]$$

$$y = 4$$

Zadanie 7.5.

Rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa 10. Wyrazy a_3, a_5, a_{13} tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznaczyć wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n).

Niech $r > 0$ będzie resztą rosnącego ciągu arytmetycznego a_n. Wówczas

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10 &\Leftrightarrow a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + (a_1 + 4r) = 10 \\ &\Leftrightarrow a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r + a_1 + 4r = 10 \\ &\Leftrightarrow 5a_1 + 10r = 10 \Leftrightarrow a_1 + 2r = 2. \end{aligned}$$

Korzystając z tego, że ciąg (a_3, a_5, a_{13}) jest geometryczny, otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_5^2 = a_3 \cdot a_{13} &\Leftrightarrow (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r) \cdot (a_1 + 12r) \Leftrightarrow a_1^2 + 8a_1 r + 14r^2 = a_1^2 + 12a_1 r + 2a_1 r + 24r^2 \\ &\Leftrightarrow a_1^2 + 8a_1 r + 14r^2 - a_1^2 - 12a_1 r - 2a_1 r - 24r^2 = 0 \Leftrightarrow 8r^2 + 6a_1 r = 0 \Leftrightarrow 4r^2 + 3a_1 r = 0 \\ &\Leftrightarrow r(4r + 3a_1) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = -\frac{3}{4}a_1. \end{aligned}$$

Zadanie 7.5.

Ciąg (a_n) jest rosnący, czyli

$$r = -\frac{3}{4}a_1,$$

a zatem

$$a_1 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}a_1\right) = 2 \Leftrightarrow a_1 - \frac{3}{2}a_1 = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a_1 = 2 \Leftrightarrow a_1 = -4,$$

czyli

$$r = -\frac{3}{4} \cdot (-4) \Leftrightarrow r = 3.$$

Wobec tego dla dowolnej liczby naturalnej n ogólny wyeraz ciągu a_n wyraża się wzorm

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 3,$$

czyli

$$a_n = -4 + (n-1) \cdot 3,$$

a zatem

$$a_n = -4 + 3n - 3,$$
$$a_n = -7 + 3n,$$
$$a_n = 3n - 7.$$

Zadanie 7.6.

Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jes równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Ponadto ciąg $(a+100, b, c)$ jest geometryczny. Obliczyć wyrazy ciągu (a, b, c, d).

Niech $r > 0$ będzie resztą rosnącego ciągu arytmetycznego (a, b, c, d), a q ilorazem ciągu geometrycznego $(a+100, b, c)$. Wówczas

$$b = a + r, \quad c = a + 2r, \quad d = a + 3r,$$
$$(a, b, c, d) = (a, a+r, a+2r, a+3r)$$

oraz

$$\begin{aligned}
d^2 &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow (a+3r)^2 = 2(a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2) \\
&\Leftrightarrow a^2 + 6ar + 9r^2 = 2(a^2 + a^2 + 2ar + r^2 + a^2 + 4ar + 4r^2) \\
&\Leftrightarrow a^2 + 6ar + 9r^2 = 2(3a^2 + 6ar + 5r^2) \Leftrightarrow a^2 + 6ar + 9r^2 = 6a^2 + 12ar + 10r^2 \\
&\Leftrightarrow -5a^2 - 6ar - r^2 = 0 \Leftrightarrow 5a^2 + 6ar + r^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 5a^2 + 5ra + ra + r^2 = 0 \Leftrightarrow 5a(a+r) + r(a+r) = 0 \\
&\Leftrightarrow (a+r)(5a+r) = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow a = -r \vee a = -\frac{1}{5}r.
\end{aligned}$$

Zadanie 7.6.

Jeśli $a = -r$, to
$$(a, b, c, d) = (-r, 0, r, 2r), \quad (a+100, b, c) = (-r+100, 0, r)$$
oraz
$$0^2 = r(-r+100) \Leftrightarrow 0 = r(100-r) \Leftrightarrow r = 0 \vee 100 - r = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = 100.$$
Pierwiastek $r = 0$ odrzucamy (bo $r > 0$), a dla $r = 100$ otrzymujemy
$$(a+100, b, c) = (0, 0, 100),$$
a to oznacza, że ciąg $(a+100, b, c)$ nie jest ciągiem geometrycznym. Wobec tego $r = 100$ także odrzucamy.
Jeśli $a = -\frac{1}{5}r$, to
$$(a, b, c, d) = \left(-\frac{1}{5}r, \frac{4}{5}r, \frac{9}{5}r, \frac{14}{5}r\right),$$
$$(a+100, b, c) = \left(-\frac{1}{5}r + 100, \frac{4}{5}r, \frac{9}{5}r\right)$$
oraz
$$\left(\frac{4}{5}r\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}r + 100\right) \cdot \frac{9}{5}r \Leftrightarrow \frac{16}{25}r^2 = -\frac{9}{25}r^2 + 180r \Leftrightarrow \frac{16}{25}r^2 + \frac{9}{25}r^2 - 180r = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{25}{25}r^2 - 180r = 0 \Leftrightarrow r^2 - 180r = 0 \Leftrightarrow r(r-180) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = 180.$$

Zadanie 7.6.

Pierwiastek $r = 0$ odrzucamy (bo $r > 0$), a dla $r = 180$ otrzymujemy

$$(a, b, c, d) = \left(-\frac{1}{5} \cdot 180, \frac{4}{5} \cdot 180, \frac{9}{5} \cdot 180, \frac{14}{5} \cdot 180\right) = (-36, 144, 324, 504)$$

oraz

$$(a + 100, b, c) = (64, 144, 324).$$

Ciąg $(64, 144, 324)$ jest geometryczny, bo

$$\frac{144}{64} = \frac{9}{4} = \frac{324}{144}.$$

Wobec tego

$$(a, b, c, d) = (-36, 144, 324, 504).$$

Zadanie 7.7.

Liczba x jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 1 i ilorazie $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Liczba y jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 1 i ilorazie $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Obliczyć $x - y$.

$$x = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$$

$$x - y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) - \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}$$

Literatura

1. Arkusze zadań maturalnych z matematyki na poziomach podstawowym i rozszerzonym.
2. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa I i II,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.
3. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa III i IV,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
4. W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów. Definicje, twierdzenia, wzory, przykłady,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
5. W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów. Zadania,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994.