Zadania z matematyki Część III

Dr Tomasz Zgraja
(rysunki mgr inż. Mirosław Owczorz)
Wydział Budowy Maszyn i Informatyki

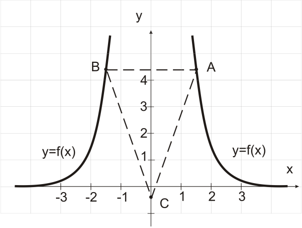
Uniwersytet Bielsko-Bialski
EKSPRES MATURALNY UBB
ekspres.ubb.edu.pl

Spis treści

8. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Zadanie 8.1. Sprawdzić, czy prosta dana równaniem $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 5$ w punkcie $(1, 5)$.

Zadanie 8.2. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołki A i B leżą na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{9}{x^4}$ dla $x \neq 0$. Punkt C ma współrzędne $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, a punkty A i B są położone symetrycznie względem osi Oy. Obliczyć współrzędne wierzchołków A i B, dla których pole trójkąta ABC jest najmniejsze. Obliczyć to najmniejsze pole.



Spis treści

9. Geometria analityczna

Zadanie 9.1. Końcami odcinka PR są punkty $P = (4, 7)$ i $R = (-2, -3)$. Wyznaczyć odległość punktu $T = (3, -1)$ od środka odcinka PR.

Zadanie 9.2. Dane są punkty $M = (6, 0)$, $N = (6, 8)$ oraz $O = (0, 0)$. Obliczyć tangens kąta ostrego MON.

Zadanie 9.3. Proste o równaniach $y = 3ax - 2$ i $y = 2x + 3a$ są prostopadłe. Wyznaczyć a.

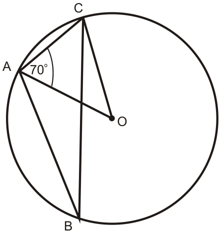
Zadanie 9.4. Dany jest trapez $ABCD$, w którym boki AB i CD są równoległe oraz $C = (3, 5)$. Wierzchołki A i B tego trapezu leżą na prostej o równaniu $y = 5x + 3$. Wyznaczyć równanie prostej, w której zawiera się bok CD tego trapezu.

Zadanie 9.5. Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = x + b$, $y = x + 2b$, $y = b$, $y = 2$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b \neq 2$, $b \neq 0$. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru b, dla których pole tego równoległoboku jest równe 1.

Spis treści

10. Geometria

Zadanie 10.1. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Miara kąta CAO jest równa 70°. Wyznaczyć miarę kąta ABC.

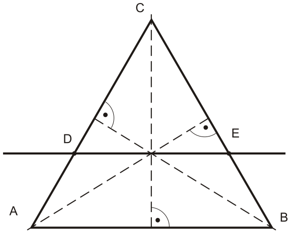


Zadanie 10.2. W romb o boku $2\sqrt{3}$ i kącie 60° wpisano okrąg. Wyznaczyć promień tego okręgu.

Spis treści

10. Geometria

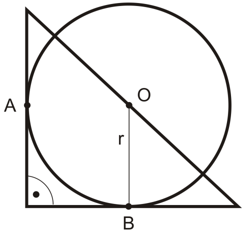
Zadanie 10.3. Przez punkt przecięcia wysokości trójkąta równobocznego ABC poprowadzono prostą DE równoległą do podstawy AB. Wyznaczyć stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta CDE.



Zadanie 10.4. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy AB i CD mają długości równe odpowiednio a i b (przy czym $a > b$). Miara kąta ostrego trapezu jest równa 30°. Obliczyć wysokość tego trapezu.

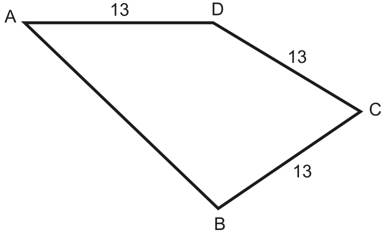
10. Geometria

Zadanie 10.5. Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostoątne mają długości a i b. Punkt O leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta i jest środkiem okręgu stycznego do przyprostokątnych tego trójkąta. Wykazać, że promień r tego okręgu jest równy $\frac{ab}{a+b}$.



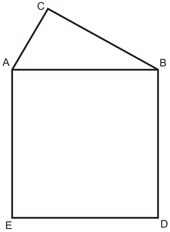
10. Geometria

Zadanie 10.6. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |AD| = 13$. Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10 i jest proporcjonalna do boku AD. Obliczyć pole czworokąta $ABCD$.



10. Geometria

Zadanie 10.7. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadrat $ABCDE$. Stosunek pola trójkąta do pola kwadratu jest równy k. Wykazać, że suma tangensów kątów ostrych tego trójkąta jest równa $\frac{1}{2k}$.



Zadanie 10.8. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$. Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10. Kąty wewnętrzne BAD i ADC czworokąta $ABCD$ są ostre, a iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$. Obliczyć miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.

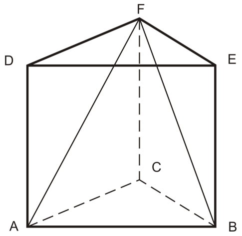
Spis treści

10. Geometria

Zadanie 10.9. Obliczyć objętość sześcianu, którego przekątna ma długość $5\sqrt{3}$.

Zadanie 10.10. Ostrosłupy prawidłowe trójkątne O_1 i O_2 mają takie same wysokości. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa O_1 jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy ostrosłupa O_2. Wyznaczyć stosunek objętości ostrosłupa O_1 do objętości ostrosłupa O_2.

Zadanie 10.11. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 4, a wysokość graniastosłupa jest równa 6. Obliczyć sinus kąta AFB.



8. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Zadanie 8.1.

Sprawdzić, czy prosta dana równaniem $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 5$ w punkcie $(1, 5)$.

Punkt $(1, 5)$ należy do wykresu funkcji f, bo $f(1) = 1 - 3 + 1 + 1 + 5 = 5$. Obliczymy pochodną funkcji f, a mianowicie

$$f'(x) = 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 2x + 1 = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1, 5)$ jest równy

$$f'(1) = 4 - 9 + 2 + 1 = -2,$$

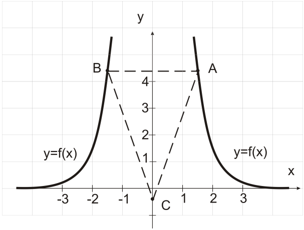
a to oznacza, że prosta styczna jest prostopadła do prostej $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, bo iloczyn współczynników kierunkowych tych prostych równa się

$$(-2) \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

8. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Zadanie 8.2.

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołki A i B leżą na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{9}{x^4}$ dla $x \neq 0$. Punkt C ma współrzędne $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, a punkty A i B są położone symetrycznie względem osi Oy. Obliczyć współrzędne wierzchołków A i B, dla których pole trójkąta ABC jest najmniejsze. Obliczyć to najmniejsze pole.



Niech $x > 0$. Wówczas

$$A = (x, f(x)) = \left(x, \frac{9}{x^4}\right), \quad B = (-x, f(x)) = \left(-x, \frac{9}{x^4}\right),$$

a środek C_1 odcinka AB należy do osi Oy i ma współrzędne

$$C_1 = \left(0, \frac{\frac{9}{x^4} + \frac{9}{x^4}}{2}\right) = \left(0, \frac{9}{x^4}\right).$$

Zadanie 8.2.

Pole $|P|$ trókąta ABC jest równe

$$|P| = \frac{1}{2} \cdot |BA| \cdot |C_1 C| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x-(-x))^2 + \left(\frac{9}{x^4} - \frac{9}{x^4}\right)^2} \cdot \sqrt{(0-0)^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{9}{x^4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2x)^2} \cdot \sqrt{\left(-\left(\frac{1}{3} + \frac{9}{x^4}\right)\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot |2x| \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{9}{x^4}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \left|\frac{1}{3} + \frac{9}{x^4}\right|$$

$$= x \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{x^4}\right) = \frac{x}{3} + \frac{9}{x^3}.$$

Przedstawiamy $|P|$ jako funkcję g zmiennej x i wyznaczymy ekstrema lokalne tej funkcji, a mianowicie

$$g(x) = \frac{x}{3} + \frac{9}{x^3}, x \in (0, +\infty).$$

Ponieważ

$$g'(x) = \left(\frac{x}{3} + \frac{9}{x^3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x)' + 9 \cdot (x^{-3})' = \frac{1}{3} \cdot 1 + 9 \cdot (-3) \cdot (x^{-4})' = \frac{1}{3} - \frac{27}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 - 81}{3x^4} = \frac{(x^2)^2 - 9^2}{3x^4} = \frac{(x^2+9)(x^2-9)}{3x^4} = \frac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{3x^4}, \quad x \in (0, +\infty),$$

Zadanie 8.2.

więc

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{3x^4} = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 3,$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{3x^4} = 0 \Leftrightarrow x \in (-3,0) \cup (0,3) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \in (0,3),$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{3x^4} = 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \in (3,+\infty).$$

Stąd wynika, że funkcja g maleje w przedziale $(0,3)$ i rośnie w przedziale $(3,+\infty)$, a zatem w punkcie $x=3$ ma minimum lokalne równe

$$g(3) = \frac{3}{3} + \frac{9}{27} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Jest to zarazem najmniejsza wartość funkcji g, bo $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Wobec tego najmniejsze pole $|P|$ trójkąta ABC jest równe

$$|P| = \frac{4}{3},$$

a jego wierzchołki A, B mają współrzędne

$$A = \left(3, \frac{9}{81}\right) = \left(3, \frac{1}{9}\right), \quad B = \left(-3, \frac{9}{81}\right) = \left(-3, \frac{1}{9}\right).$$

9. Geometria analityczna

Zadanie 9.1.

Końcami odcinka PR są punkty $P=(4,7)$ i $R=(-2,-3)$. Wyznaczyć odległość punktu $T=(3,-1)$ od środka odcinka PR.
Środek S odcinka PR ma współrzędne

$$S=(x_S,y_S)=\left(\frac{x_P+x_R}{2},\frac{y_P+y_R}{2}\right)=\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{7+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\frac{4}{2}\right)=(1,2).$$

Wobec tego odległość punktów T i S jest równa długości odcinka TS, czyli

$$|TS|=\sqrt{(x_S-x_T)^2+(y_S-y_T)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}.$$

Zadanie 9.2.

Dane są punkty $M = (6, 0)$, $N = (6, 8)$ oraz $O = (0, 0)$. Obliczyć tangens kąta ostrego MON.
Kąt OMN trójkąta o wierzchołkach O, M i N jest prosty, bo odcinek NM jest prostopadły do osi Ox, a odcinek OM leży na osi Ox. Wobec tego

$$\operatorname{tg} \measuredangle MON = \frac{|NM|}{|OM|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Zadanie 9.3.

Proste o równaniach $y = 3ax - 2$ i $y = 2x + 3a$ są prostopadłe. Wyznaczyć a.

$$3a \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 6a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$$

Zadanie 9.4.

Dany jest trapez $ABCD$, w którym boki AB i CD są równoległe oraz $C = (3, 5)$. Wierzchołki A i B tego trapezu leżą na prostej o równaniu $y = 5x + 3$. Wyznaczyć równanie prostej, w której zawiera się bok CD tego trapezu.
Prosta równoległa do prostej $y = 5x + 3$ ma równanie

$$y = 5x + b.$$

Korzystając z tego, że punkt C należy do powyższej prostej otrzymujemy

$$5 = 5 \cdot 3 + b \Leftrightarrow 5 = 15 + b \Leftrightarrow b = -10.$$

Wobec tego prosta, w której zawiera się bok CD ma równanie

$$y = 5x - 10.$$

Zadanie 9.5.

Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = x + b$, $y = x + 2b$, $y = b$, $y = 2$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b \neq 2$, $b \neq 0$. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru b, dla których pole tego równoległoboku jest równe 1.

Zauważmy, że dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych równoległych do osi Ox: $y = b$ i $y = 2$. Wobec tego odległość tych prostych, równa $|2 - b| \neq 0$, jest równocześnie wysokością równoległoboku. Wierzchołki równoległoboku położone na prostej $y = 2$ są punktami przecięcia się tej prostej z prostymi $y = x + b$ i $y = x + 2b$, a mianowicie

$$\begin{cases} y = x + b \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = x + b \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - b \\ y = 2 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} y = x + 2b \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = x + 2b \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - 2b \\ y = 2 \end{cases} .$$

Długość podstawy równoległoboku jest równa odległości tych punktów, czyli

$$\sqrt{(2 - 2b - (2 - b))^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{(2 - 2b - 2 + b)^2} = \sqrt{(-b)^2} = \sqrt{b^2} = |b| \neq 0,$$

a zatem pole S równoległoboku jest równe

$$S = |b| \cdot |2 - b| = |b(2 - b)|.$$

Zadanie 9.5.

Wobec tego

$$S = 1 \Leftrightarrow |b(2-b)| = 1 \Leftrightarrow b(2-b) = -1 \vee b(2-b) = 1 \Leftrightarrow 2b - b^2 = -1 \vee 2b - b^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2b - 1 = 0 \vee b^2 - 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \vee \frac{2+\sqrt{8}}{2} \vee (b-1)^2 = 0$$

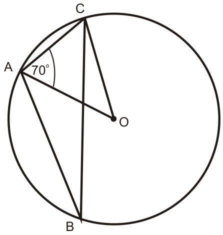
$$\Leftrightarrow b = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} \vee \frac{2+2\sqrt{2}}{2} \vee b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1-\sqrt{2} \vee 1+\sqrt{2} \vee b = 1.$$

Pole równoległoboku jest równe 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $b \in \{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}\}$.

10. Geometria

Zadanie 10.1.

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Miara kąta CAO jest równa 70°. Wyznaczyć miarę kąta ABC.



Korzystając z tego, że trójkąt AOC jest równoramienny i z tego, że kąt ABC jest kątem wpisanym w okrąg opartym na tym samym łuku co kąt środkowy AOC otrzymujemy

$$|\measuredangle AOC| = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

oraz

$$|\measuredangle AOC| = 2 \cdot |\measuredangle ABC|,$$

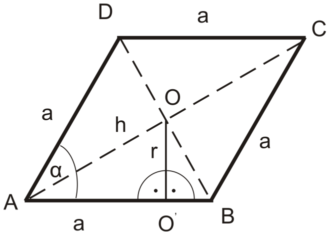
a zatem

$$|\measuredangle ABC| = \frac{1}{2} \cdot |\measuredangle AOC| = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 20^\circ.$$

10. Geometria

Zadanie 10.2.

W romb o boku $2\sqrt{3}$ i kącie 60° wpisano okrąg. Wyznaczyć promień tego okręgu.



Zauważmy, że trójkąty DAB i BCD są równoboczne. Wobec tego

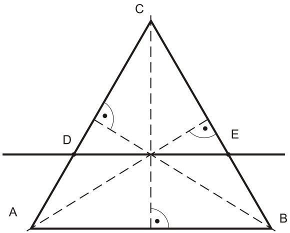
$$\frac{r}{h} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

a zatem promień r okręgu wpisanego w ten romb jest równy

$$r = h \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Zadanie 10.3.

Przez punkt przecięcia wysokości trójkąta równobocznego ABC poprowadzono prostą DE równoległą do podstawy AB. Wyznaczyć stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta CDE.



Niech $|P_{ABC}|$, $|P_{CDE}|$ i a oznaczją odpowiednio pole trójkąta ABC, pole trójkąta CDE, długość boku trójkąta ABC. W trójkącie równobocznym wysokości są również środkowymi, a zatem przecinają się w punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku $2:1$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{|P_{ABC}|}{|P_{CDE}|} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}|DE| \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{|DE| \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3a}{2|DE|}.$$

Zadanie 10.3.

Korzystając z podobieństwa trójkątów ABC i DEC mamy

$$\frac{\frac{1}{2}|DE|}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \frac{|DE|}{a} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow DE = \frac{2}{3}a,$$

a zatem

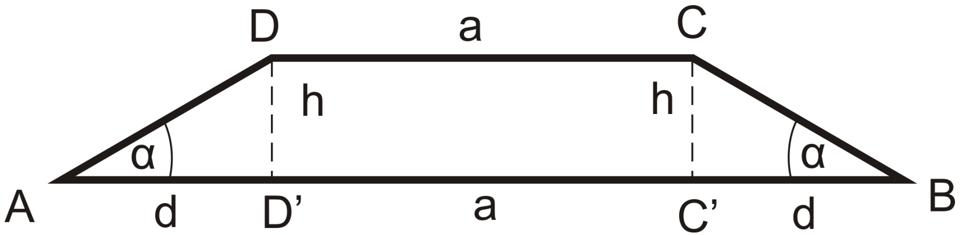
$$\frac{|P_{ABC}|}{|P_{CDE}|} = \frac{3a}{2\cdot\frac{2}{3}a} = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 2} = \frac{9}{4}.$$

Wobec tego stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta CDE jest równy $9:4$.

10. Geometria

Zadanie 10.4.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy AB i CD mają długości równe odpowiednio a i b (przy czym $a > b$). Miara kąta ostrego trapezu jest równa 30°. Obliczyć wysokość tego trapezu.



Niech h oznacza wysokość trapezu. Wówczas

$$\operatorname{tg}(\measuredangle DAC) = \frac{h}{d} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{d} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{d} \Leftrightarrow h = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

oraz

$$a = d + b + d = 2d - b \Leftrightarrow d = \frac{a-b}{2},$$

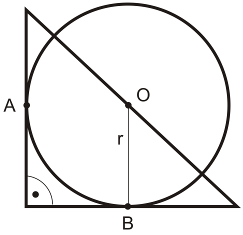
a zatem

$$h = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}.$$

10. Geometria

Zadanie 10.5.

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostoątne mają długości a i b. Punkt O leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta i jest środkiem okręgu stycznego do przyprostokątnych tego trójkąta. Wykazać, że promień r tego okręgu jest równy $\frac{ab}{a+b}$.



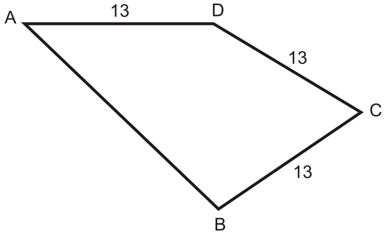
Korzystając z podobieństwa trójkątów otrzymujemy

$$\frac{a}{b} = \frac{r}{b-r} \Leftrightarrow a(b-r) = br \Leftrightarrow ab - ar = br \Leftrightarrow ab = ar + br \Leftrightarrow ab = r(a+b) \Leftrightarrow r = \frac{ab}{a+b}.$$

10. Geometria

Zadanie 10.6.

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |AD| = 13$. Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10 i jest proporcjonalna do boku AD. Obliczyć pole czworokąta $ABCD$.



Pole $|P|$ czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkąta prostokątnego ADB (o przyprostokątnych AD i DB mających długości odpowiednio 13 i 10) i trójkąta równoramiennego BDC (o podstawie BD i ramionach DC i BC mających długości odpowiednio 10, 13 i 13). Obliczając długość h wysokości trójkąta równoramiennego, a mianowicie

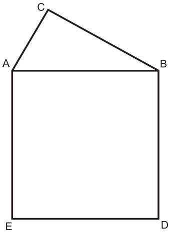
$$h^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 13^2 \Leftrightarrow h^2 + 25 = 169 \Leftrightarrow h^2 = 144 \Leftrightarrow h = 12 \ \ (h > 0)$$

otrzymujemy ostatecznie

$$|P| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 65 + 60 = 125.$$

Zadanie 10.7.

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadrat $ABCDE$. Stosunek pola trójkąta do pola kwadratu jest równy k. Wykazać, że suma tangensów kątów ostrych tego trójkąta jest równa $\frac{1}{2k}$.



Niech $|P_{ABC}|$ i $|P_{ABDE}|$ oznaczają odpowiednio pole trójkąta ABC i pole kwadratu $ABDE$. Wówczas

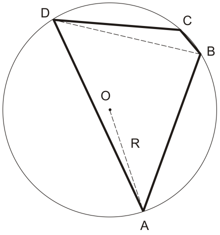
$$\operatorname{tg}(\measuredangle CAB) + \operatorname{tg}(\measuredangle ABC) = \frac{|CB|}{|CA|} + \frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|CB|^2 + |CA|^2}{|CA| \cdot |CB|} = \frac{|AB|^2}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |CA| \cdot |CB|}$$

$$= \frac{|P_{ABDE}|}{2 \cdot |P_{ABC}|} = \frac{1}{2 \cdot \frac{|P_{ABC}|}{|P_{ABDE}|}} = \frac{1}{2k}.$$

10. Geometria

Zadanie 10.8.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$. Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10. Kąty wewnętrzne BAD i ADC czworokąta $ABCD$ są ostre, a iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$. Obliczyć miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.



Trøójkąt ABD jest wpisany w okrąg. Wobec tego

$$\frac{|BD|}{\sin(\measuredangle BAD)} = 2R \Leftrightarrow \frac{10}{\sin(\measuredangle BAD)} = 2 \cdot 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(\measuredangle BAD) = \frac{10}{10\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\measuredangle BAD) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(\measuredangle BAD) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

czyli $|\measuredangle BAD| = 45^\circ$ (kąt BAD jest ostry).

Zadanie 10.8.

Korzystając z tego, że czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg otrzymujemy

$$|\measuredangle BAD| + |\measuredangle BCD| = |\measuredangle ADC| + |\measuredangle ABC| = 180^\circ,$$

a zatem $|\measuredangle BCD| = 180^\circ - |\measuredangle BAD| = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Wykorzystując iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych otrzymujemy

$$\sin(\measuredangle BAD) \cdot \sin(\measuredangle ABC) \cdot \sin(\measuredangle BCD) \cdot \sin(\measuredangle ADC) = \frac{3}{8},$$

$$\sin(\measuredangle BAD) \cdot \sin(180^\circ - \measuredangle BAD) \cdot \sin(180^\circ - \measuredangle ADC) \cdot \sin(\measuredangle ADC) = \frac{3}{8},$$

$$\sin(\measuredangle BAD) \cdot \sin(\measuredangle BAD) \cdot \sin(\measuredangle ADC) \cdot \sin(\measuredangle ADC) = \frac{3}{8},$$

$$(\sin(\measuredangle BAD))^2 \cdot (\sin(\measuredangle ADC))^2 = \frac{3}{8},$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot (\sin(\measuredangle ADC))^2 = \frac{3}{8},$$

$$\frac{2}{4} \cdot (\sin(\measuredangle ADC))^2 = \frac{3}{8},$$

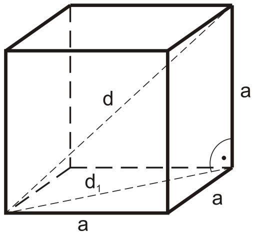
Zadanie 10.8.

$$\frac{2}{4} \cdot (\sin(\measuredangle ADC))^2 = \frac{3}{8},$$
$$(\sin(\measuredangle ADC))^2 = \frac{3}{4},$$
$$\sin(\measuredangle ADC) = \sqrt{\frac{3}{4}} \text{ (kąt } ADC \text{ jest ostry)},$$
$$|\measuredangle ADC| = 60^\circ.$$

Wobec tego $|\measuredangle ABC| = 180^\circ - |\measuredangle ADC| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Miary kątów wewnętrznych BAD, ABC, BCD i ADC czworokąta są odpowiednio równe 45°, 120°, 135° i 60°.

Zadanie 10.9.

Obliczyć objętość sześcianu, którego przekątna ma długość $5\sqrt{3}$.



Niech a, d_1 i d oznaczją odpowiednio długości: krawędzi, przekątnej ściany i przekątnej sześcianu. Wówczas

$$a^2 + a^2 = d_1^2$$

oraz

$$a^2 + d_1^2 = d^2,$$

czyli

$$a^2 + a^2 + a^2 = d^2,$$

Zadanie 10.9.

a zatem

$$3a^2 = (5\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 3a^2 = 25 \cdot 3 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5 \ \ (a > 0).$$

Wobec tego objętość $|V|$ sześcianu jest równa

$$|V| = 5^3 = 125.$$

Zadanie 10.10.

Ostrosłupy prawidłowe trójkątne O_1 i O_2 mają takie same wysokości. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa O_1 jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy ostrosłupa O_2. Wyznaczyć stosunek objętości ostrosłupa O_1 do objętości ostrosłupa O_2.

Niech $|V_{O_1}|$, $|V_{O_2}|$, a i h oznaczją odpowiednio objętość ostrosłupa O_1, objętość ostrosłupa O_2, długość boku trójkąta równobocznego będącego podstawą ostrosłupa O_1 i wysokość ostrosłupów O_1 i O_2. Wówczas

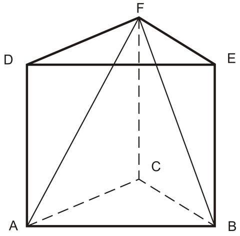
$$\frac{|V_{O_1}|}{|V_{O_2}|} = \frac{\frac{1}{3}\cdot P_{P_1}\cdot h}{\frac{1}{3}\cdot P_{P_2}\cdot h} = \frac{P_{P_1}}{P_{P_2}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot h}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{\frac{a}{3}\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot h} = \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9.$$

Wobec tego stosunek objętości ostrosłupa O_1 do objętości ostrosłupa O_2 jest równy 9 : 1.

10. Geometria

Zadanie 10.11.

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 4, a wysokość graniastosłupa jest równa 6. Obliczyć sinus kąta AFB.



Korzystając z tego, że graniastosłup jest prawidłowy oraz z twierdzeń Pitagorasa i cosinusów otrzymujemy

$$|AF| = \sqrt{|AC|^2 + |BF|^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13},$$

$$|BF| = |AF| = 2\sqrt{13},$$
$$|AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos(\measuredangle AFB),$$

czyli

$$4^2 = (2\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{13})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \cos(\measuredangle AFB),$$

Zadanie 10.11.

a zatem

$$16 = 52 + 52 - 104 \cdot \cos(\measuredangle AFB).$$

Wobec tego

$$\cos(\measuredangle AFB) = \frac{52 + 52 - 16}{104} = \frac{88}{104} = \frac{11}{13} > 0.$$

Kąt *AFB* jest ostry, czyli

$$\begin{aligned}\sin(\measuredangle AFB) &= \sqrt{1 - (\cos(\measuredangle AFB))^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{11^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{13^2 - 11^2}{13^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(13+11)(13-11)}{13^2}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 2}{13^2}} = \sqrt{\frac{4^2 \cdot 3}{13^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{13}.\end{aligned}$$

Literatura

1. Arkusze zadań maturalnych z matematyki na poziomach podstawowym i rozszerzonym.
2. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa I i II,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.
3. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa III i IV,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
4. W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów. Definicje, twierdzenia, wzory, przykłady,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
5. W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów. Zadania,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994.