Zadania z matematyki Część I

Dr Tomasz Zgraja
Wydział Budowy Maszyn i Informatyki

Uniwersytet Bielsko-Bialski

EKSPRES MATURALNY UBB

ekspres.ubb.edu.pl

Spis treści

Spis treści

1. Wyrażenia liczbowe i algebraiczne

Zadanie 1.1.

Obliczyć $\frac{\left(5\frac{1}{84}+\frac{31}{63}-\left(2\frac{31}{252}+3\frac{5}{21}\right)\right)\cdot\left(24:\left(1\frac{1}{2}:4\frac{3}{8}\right)\right)}{\left(1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right):\left(20\frac{1}{4}:26\right)}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(5\frac{1}{84}+\frac{31}{63}-\left(2\frac{31}{252}+3\frac{5}{21}\right)\right)\cdot\left(24:\left(1\frac{1}{2}:4\frac{3}{8}\right)\right)}{\left(1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right):\left(20\frac{1}{4}:26\right)} &= \frac{\left(5+\frac{1}{84}+\frac{31}{63}-\left(2+\frac{31}{252}+3+\frac{5}{21}\right)\right)\cdot\left(24:\left(\frac{3}{2}:\frac{35}{8}\right)\right)}{\left(\frac{41}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right):\left(\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{26}\right)} \\
&= \frac{\left(5+\frac{1}{84}+\frac{31}{63}-2-\frac{31}{252}-3-\frac{5}{21}\right)\cdot\left(24:\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{35}\right)\right)}{\frac{246+4-7}{156}:\frac{81}{104}} \\
&= \frac{\frac{3+124-31-60}{252}\cdot\left(24:\frac{12}{35}\right)}{\frac{243}{156}\cdot\frac{104}{81}} = \frac{\frac{36}{252}\cdot\left(24\cdot\frac{35}{12}\right)}{\frac{81}{52}\cdot\frac{104}{81}} \\
&= \frac{\frac{1}{7}\cdot 70}{2} = \frac{10}{2} = 5
\end{aligned}
$$

1. Wyrażenia liczbowe i algebraiczne

Zadanie 1.2.

Obliczyć $\frac{20\cdot 3^{-4}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1}+\left(-\frac{1}{8}\right)^{0}}$.

$$\frac{20\cdot 3^{-4}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1}+\left(-\frac{1}{8}\right)^{0}}=\frac{20\cdot\frac{1}{3^{4}}-\left(\frac{4}{3}\right)^{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{10}+1}=\frac{\frac{20}{81}-\frac{4^{4}}{81}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{11}{10}}=\left(\frac{20}{81}-\frac{64}{81}\right)\cdot\frac{10}{11}=\left(-\frac{44}{81}\right)\cdot\frac{10}{11}=-\frac{40}{81}$$

1. Wyrażenia liczbowe i algebraiczne

Zadanie 1.3.

Obliczyć $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$.

$$\begin{aligned}
\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) &= \left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-\frac{1}{4}}-\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\\
&= \left(4^{-\frac{1}{4}}+2^{-2}\right)\cdot\left(4^{-\frac{1}{4}}-2^{-2}\right)\\
&= \left(4^{-\frac{1}{4}}\right)^2-(2^{-2})^2 = 4^{-\frac{1}{2}}-2^{-4}\\
&= \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{8-1}{16}=\frac{7}{16}
\end{aligned}$$

Zadanie 1.4.

Obliczyć $\sqrt{\frac{32}{72}}$.

$$\sqrt{\frac{32}{72}} = \sqrt{\frac{2^5}{2^3 \cdot 3^2}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{2}{3}$$

1. Wyrażenia liczbowe i algebraiczne

Zadanie 1.5.

Obliczyć $\sqrt[3]{\frac{189}{56}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{189}{56}} = \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 7}{2^3 \cdot 7}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}$$

Zadanie 1.6.

Obliczyć $\sqrt{2{,}9^2 - 0{,}34^2}$.

$$\sqrt{2{,}9^2 - 0{,}34^2} = \sqrt{(2{,}9 + 0{,}34)(2{,}9 - 0{,}34)} = \sqrt{3{,}24 \cdot 2{,}56} = \sqrt{3{,}24} \cdot \sqrt{2{,}56} = 1{,}8 \cdot 1{,}6 = 2{,}88$$

Zadanie 1.7.

Obliczyć $(\sqrt{12}+3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$.

$$(\sqrt{12}+3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{4\cdot 3}+3\sqrt{25\cdot 3})\cdot\sqrt{3}=(2\sqrt{3}+3\cdot 5\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=((2+15)\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=17\cdot 3=51$$

Zadanie 1.8.

Wykazać że $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3} = 8 - 6\sqrt{3}$.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3} &= (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3\cdot 2}\cdot\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{3} \\
&= 8 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{3}\cdot 2 - 2\sqrt{3} = 8 - 6\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Zadanie 1.9.

Wykazać, że $\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=1$.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1+1-\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Zadanie 1.10.

Wykazać, że $\frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1$.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1) - 2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}+2-2\sqrt{5}+2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$$

Zadanie 1.11.

Wykazać, że $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}-2\sqrt[3]{4}=2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}-2\sqrt[3]{4} &= \frac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)((\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1)}+\frac{3((\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)((\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1)}-2\sqrt[3]{4}\\
&= \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1}+\frac{3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}-2\sqrt[3]{4}\\
&= \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{1}+\frac{3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{3}-2\sqrt[3]{4}\\
&= \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1-2\sqrt[3]{4}=2
\end{aligned}$$

1. Wyrażenia liczbowe i algebraiczne

Zadanie 1.12.

Rozłożyć na czynniki wyrażenie $a^2 + 2ab + b^2 - 9$ dla $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a^2 + 2ab + b^2 - 9 = (a+b)^2 - 3^2 = (a+b+3)(a+b-3)$$

Zadanie 1.13.

Rozłożyć na czynniki wyrażenie $m^4 + m^3 + m^2 + m$ dla $m \in \mathbb{R}$.

$$m^4 + m^3 + m^2 + m = m(m^3 + m^2 + m + 1) = m(m^2(m + 1) + m + 1) = m(m + 1)(m^2 + 1)$$

1. Wyrażenia liczbowe i algebraiczne

Zadanie 1.14.

Rozłożyć na czynniki wyrażenie $a^5 - a^3 + a^2 - 1$ dla $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a^5 - a^3 + a^2 - 1 &= a^3(a^2 - 1) + a^2 - 1 = (a^2 - 1)(a^3 + 1) = (a + 1)(a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1) \\ &= (a + 1)^2(a - 1)(a^2 - a + 1) \end{aligned}$$

Zadanie 1.15.

Przedstawić w postaci iloczynu wyrażenie $a - b + (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{c}$ dla $a, b > 0$.

$$\begin{aligned} a - b + (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{c} &= (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{c} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{c} \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \end{aligned}$$

Zadanie 1.16.

Przedstawić w postaci iloczynu wyrażenie $ab - a\sqrt{a} - \sqrt{ab} + b\sqrt{b}$ dla $a, b > 0$.

$$ab - a\sqrt{a} - \sqrt{ab} + b\sqrt{b} = a(b - \sqrt{a}) - \sqrt{a}\sqrt{b} + b\sqrt{b} = a(b - \sqrt{a}) + \sqrt{b}(b - \sqrt{a}) = (b - \sqrt{a})(a + \sqrt{b})$$

Zadanie 1.17.

Dla $x \neq 0$ uprościć wyrażenie $\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1}$.

$$\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1}=\frac{\frac{x^3+1}{x}}{\frac{x^2+1-x}{x}}=\frac{x^3+1}{x}\cdot\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{x^3+1}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=x+1$$

Zadanie 1.18.

Dla $a \neq 0, 1, -1$ uprościć wyrażenie $\frac{2}{a} - \left(\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} - \frac{2}{1-a}\right) : \frac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{a} - \left(\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} - \frac{2}{1-a}\right) : \frac{a^3+a^2+2a}{a^2-1} &= \frac{2}{a} - \left(\frac{a+1}{(a-1)(a^2+a+1)} - \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{2}{a-1}\right) \cdot \frac{a^2-1}{a^3+a^2+2a} \\
&= \frac{2}{a} - \frac{a+1-(a-1)+2(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{a(a^2+a+2)} \\
&= \frac{2}{a} - \frac{(a+1-a+1+2a^2+2a+2)(a+1)}{a(a^2+a+1)(a^2+a+2)} \\
&= \frac{2}{a} - \frac{(2a^2+2a+4)(a+1)}{a(a^2+a+1)(a^2+a+2)} = \frac{2}{a} - \frac{2(a^2+a+2)(a+1)}{a(a^2+a+1)(a^2+a+2)} \\
&= \frac{2}{a} - \frac{2(a+1)}{a(a^2+a+1)} = \frac{2(a^2+a+1)-2(a+1)}{a(a^2+a+1)} \\
&= \frac{2a^2+2a+2-2a-2}{a(a^2+a+1)} = \frac{2a^2}{a(a^2+a+1)} = \frac{2a}{a^2+a+1}
\end{aligned}
$$

Zadanie 1.19.

Dla $x, y \neq 0$, $x \neq y$ uprościć wyrażenie $\frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) &= \frac{1}{(x+y)^2} \cdot \frac{y^2+x^2}{x^2y^2} + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \frac{y+x}{xy} \\
&= \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2(xy)^2} + \frac{2(x+y)}{(x+y)^3xy} \\
&= \frac{(x^2+y^2)(x+y) + 2(x+y)xy}{(x+y)^3(xy)^2} \\
&= \frac{(x+y)(x^2+y^2+2xy)}{(x+y)^3(xy)^2} \\
&= \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2(xy)^2} = \frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{x^2y^2}
\end{aligned}
$$

Zadanie 1.20.

Obliczyć wartość wyrażenia $\left(a^{-\frac{3}{2}} b \left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^3$ dla $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

$$W(a,b) = \left(a^{-\frac{3}{2}} b \left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(a^{-\frac{3}{2}} ba^{-\frac{1}{2}} ba^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(a^{-\frac{4}{3}} b^2\right)^3 = a^{-4} b^6$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$W\left(2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4} \cdot \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^2 \cdot 2^{-2} = 2^0 = 1$$

Zadanie 1.21.

Wykazać, że dla $a \in (2,3)$ zachodzi równość $\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a} + \frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2} = 2$.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a} + \frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2} &= \frac{\sqrt{(a-3)^2}}{3-a} + \frac{\sqrt{(a-2)^2}}{a-2} = \frac{|a-3|}{3-a} + \frac{|a-2|}{a-2} \\ &= \frac{-(a-3)}{3-a} + \frac{a-2}{a-2} = \frac{3-a}{3-a} + 1 = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

Zadanie 1.22.

Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby b zachodzi równość $(\sqrt[2]{b} \cdot \sqrt[4]{b})^{\frac{1}{3}} = b^{0,25}$.

$$(\sqrt[2]{b} \cdot \sqrt[4]{b})^{\frac{1}{3}} = \left(b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{4}} = b^{0,25}$$

Literatura

1. Arkusze zadań maturalnych z matematyki na poziomach podstawowym i rozszerzonym.
2. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa I i II,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.
3. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa III i IV,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
4. W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów. Definicje, twierdzenia, wzory, przykłady,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
5. W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka dla maturzystów. Zadania,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994.